1^{o} Διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ λυκείου

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ και $x \in (0,+\infty)$.

Να αποδείξετε ότι $\left(\alpha^{x}\right)' = \alpha^{x} \cdot \ell n\alpha$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$. μονάδες 6

Α2. Ποια σημεία ονομάζουμε κρίσιμα μιας συνάρτησης f ; μονάδες 5

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει τοπικό ακρότατο , τότε η $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ » .

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α , αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. μονάδα 1

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη .

1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ και } \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} .$$

2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ell n|x|$, $x \neq 0$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

3. Το πεδίο ορισμού της $g o f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f , για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g .

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)>f(\beta)$ τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)>0$.

5. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Β1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=0$. μονάδες 6

Για $\alpha=\beta=1$,

Β2. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να βρείτε το σύνολο τιμών της . μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της f^{-1} είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x)=\dfrac{2-x}{x}$, $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. μονάδες 6

Β4. Να μελετήσετε την f^{-1} ως προς την κυρτότητα , να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε την γραφική της παράσταση . μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ell nx + x^2 - 3x + 2$.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = x\ell nx$ και $h(x) = 3x - x^2 - 2$ έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο , στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

μονάδες 5

Γ3. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα την συνάρτηση g και να αποδείξετε ότι

$$-x^2 + 3x - 2 \le x \le x\ell nx + 1 \text{ , για κάθε } x > 0 .$$

Πότε ισχύει η ισότητα ;

μονάδες 7

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f(3)$.

μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - \ell nx$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

μονάδες 6

Δ3. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ell nx$ στο σημείο $\mathrm{A}(\alpha, \ell n\alpha)$, με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτηση $h(x) = e^x$ στο σημείο $\mathrm{B}(\beta, e^{\beta})$, με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

μονάδες 9

Δ4. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες .

μονάδες 3

ΕΥΧΟΜΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Παναγιώτης Περδικούρης